Chambre de Commerce et d'Industrie de Paris

DIRECTION DE L'ENSEIGNEMENT

DIRECTION DES ADMISSIONS ET CONCOURS

ÉCOLE SUPÉRIEURE DE COMMERCE DE PARIS

CONCOURS D'ADMISSION DE 1987

Mathématiques I

OPTION : Générale

Mercredi 6 Mai 1987, de 8 heures à 12 heures

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.,

Dans la première partie du problème, on approche le nombre réel $\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^{1/3}$ à l'aide d'une suite numérique. Dans la seconde partie, grâce à cette méthode, on approche sur l'intervalle $[0, 1]$ la fonction $t \mapsto t^{1/3}$ à l'aide d'une suite de fonctions polynomiales et on évalue la rapidité de la convergence.

On notera qu'une valeur approchée de α à la précision 10^{-9} est 0,793 700 526.

I. Approximation de α

Soit λ un nombre réel strictement positif. On considère la fonction numérique f_λ définie sur l'intervalle $[0, 1]$ par la relation :

$$f_\lambda(x) = x + \lambda\left(\frac{1}{2} - x^3\right).$$

1) Montrer que α est l'unique solution de l'équation $f_\lambda(x) = x$.

2) *a*) Calculer la dérivée de f_λ. Montrer que f_λ est croissante sur $[0, 1]$ si et seulement si $\lambda \leqslant \frac{1}{3}$. On suppose désormais que cette condition est satisfaite.

b) Prouver que l'intervalle $]\alpha, 1]$ est stable par f_λ, c'est-à-dire que :

$$f_\lambda(]\alpha, 1]) \subset]\alpha, 1].$$

c) Montrer que, pour tout élément x de $[\alpha, 1]$:

$$0 \leqslant f_\lambda(x) - \alpha \leqslant (x - \alpha) f'_\lambda(\alpha).$$

3) Soient c un élément de $]\alpha, 1]$ et v la suite définie par la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = v_n + \lambda\left(\frac{1}{2} - v_n^3\right)$$

et la condition initiale $v_0 = c$.

a) Montrer que la suite v est strictement décroissante et qu'elle converge vers α.

b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n:

$$0 < v_n - \alpha \leqslant (c - \alpha)[f'_\lambda(\alpha)]^n.$$

c) Montrer que $f'_\lambda(\alpha)$ est minimal si et seulement si $\lambda = \frac{1}{3}$.

4) On suppose que $\lambda = \frac{1}{3}$ et on prend $v_0 = c = 0{,}8$. Calculer v_n pour $n \leqslant 8$.

Montrer que $0 < c - \alpha < 7 \cdot 10^{-3}$ et majorer $v_8 - \alpha$. (Dans cette question, on n'utilisera pas la valeur approchée de α donnée en tête de l'énoncé.)

II. Approximation polynomiale de $t \mapsto t^{1/3}$

Pour tout élément t de l'intervalle $[0, 1]$, on considère la suite $(u_n(t))$ définie par la relation de récurrence :

$$u_{n+1}(t) = u_n(t) + \frac{1}{3}[t - u_n(t)^3]$$

et la condition initiale $u_0(t) = 0$.

1) *a*) Calculer $u_1(t)$ et $u_2(t)$.

b) Montrer par récurrence que, pour tout nombre entier naturel n, la fonction $t \mapsto u_n(t)$ est une fonction polynomiale et calculer son degré.

2) *a*) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n:

$$t^{1/3} - u_{n+1}(t) = [t^{1/3} - u_n(t)]\left(1 - \frac{1}{3}[t^{2/3} + t^{1/3}u_n(t) + u_n(t)^2]\right).$$

b) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n, $u_n(t) \leqslant t^{1/3}$.

c) En déduire que la suite de terme général $u_n(t)$ est croissante et positive.

d) Montrer que la suite $(u_n(t))$ converge vers $t^{1/3}$.

3) Montrer que, pour tout nombre entier naturel n:

$$t^{1/3}(1 - t^{2/3})^n \leqslant t^{1/3} - u_n(t) \leqslant t^{1/3}\left(1 - \frac{1}{3}t^{2/3}\right)^n.$$

4) Pour tout nombre entier naturel non nul n, soit φ_n l'application de $[0, 1]$ dans $\mathbf{R}$ définie par la relation :

$$\varphi_n(x) = x\left(1 - \frac{1}{3}x^2\right)^n.$$

a) Étudier la variation de φ_n et déterminer son maximum.

b) On pose $\beta_n = \sup_{t \in [0,1]} [t^{1/3} - u_n(t)]$.

Montrer que $\beta_n \leqslant \sqrt{\frac{3}{2n}}$.

c) Montrer qu'il existe un nombre réel strictement positif γ tel que, pour tout nombre entier naturel non nul n, $\beta_n \geqslant \frac{\gamma}{\sqrt{n}}$.

d) Plus précisément, soit p un nombre entier naturel non nul. Montrer que, pour tout nombre entier naturel n tel que $n \geqslant p$, on a :

$$e^{-1/2}\sqrt{\frac{1}{2n+1}} < \beta_n \leqslant \left(1 - \frac{1}{2p+1}\right)^p \sqrt{\frac{3}{2n+1}}.$$

• • •